

Ein Näherungsverfahren zur Berechnung rotationssymmetrischer elektrostatischer Felder mit beliebigen Randbedingungen und seine Anwendung auf einen Elektronenstrahlerzeuger mit Spitzenkathode

HERMANN RAUH

Institut für Angewandte Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. **26 a**, 1667—1675 [1971]; eingegangen am 12. Mai 1971)

An approximate method is described for calculating electrostatic fields of rotational symmetry with arbitrary boundary conditions. The method is based on the computation of the surface charge density on the field forming electrodes. Successfully tested by well-known analytical solutions, the method is applied to the determination of electron trajectories in an electron gun with a point cathode. The ray tracing is done by the Runge-Kutta-Nyström procedure.

1. Problemstellung

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Bestimmung von Elektronenbahnen in dem von SPEIDEL und GAUKLER¹ zur Energieanalyse der Elektronen aus Spitzenkathoden verwendeten Strahlerzeuger. Das in Abb. 1.1 im Schnitt dargestellte System ist bis auf die Haarnadel rotationssymmetrisch um die

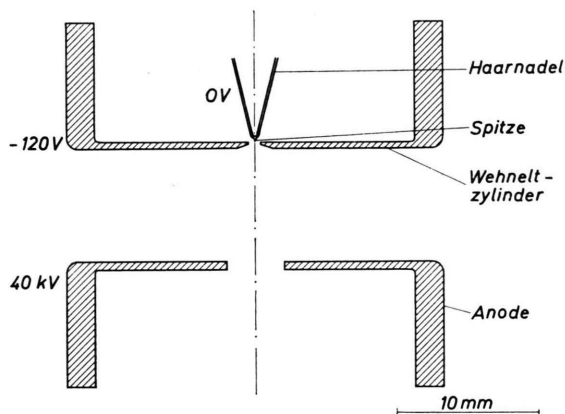


Abb. 1.1. Geometrische Anordnung des Strahlerzeugers.

strichpunktiert gezeichnete Achse. Legt man die Elektroden auf die angegebenen zeitlich konstanten Potentiale, so stellt sich ein statisches elektrisches Feld derselben Symmetrie ein, das die aus der Kathodenspitze vorwiegend durch thermische Emission austretenden Elektronen auf die Anode zu beschleunigt.

Allgemein geht der Bestimmung von Elektronenbahnen die Ermittlung der Feldverteilung voraus. Für einige einfache Beispiele kann diese bei vorgegebenen Randbedingungen und Randwerten analytisch berechnet, und für wenige unter diesen können die Bewegungs- bzw. Bahngleichungen exakt gelöst werden. Meist ist man auf Näherungen angewiesen. Eine experimentelle Methode zur Bestimmung rotationssymmetrischer oder ebener Felder ist ihre Ausmessung im elektrolytischen Trog²; die Elektronenbahnen können dann an Hand des gezeichneten Potentiallinienbildes beispielsweise graphisch³ ermittelt werden. Während bei Rechnungen die Bahnen in vielen Fällen und auch in dieser Arbeit mittels Schrittverfahren bestimmt werden, stehen zur Feldermittlung verschiedene Methoden zur Verfügung. Meist wird die Methode von LIEBMANN⁴ angewendet, welche auf der iterativen Lösung der zur Potentialgleichung für den ladungsfreien Raum gehörenden Differenzengleichung beruht.

Als neue Methode zur Berechnung beliebiger rotationssymmetrischer elektrostatischer Felder bei vorgegebenen Randbedingungen und Randwerten wird in dieser Arbeit nach dem Vorschlag von CRUISE⁵ ein einfach zu handhabendes Näherungsverfahren ausgearbeitet. Dieses Verfahren bietet gegenüber der Liebmannschen Methode neben der bequemeren Anpassung an die Randbedingungen den Vorteil, daß die für die Bahnberechnung benötigten Felddaten nicht in zweidimensionalen, sondern nur in

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. F. LENZ, Lehrstuhl
für Theoretische Elektronenphysik, Universität Tübingen,
D-7400 Tübingen, Zeppelinstraße 6.

¹ R. SPEIDEL u. K. H. GAUKLER, Z. Phys. **208**, 419 [1968].

² W. GLASER, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer-Verlag, Wien 1952, S. 157–161.

³ V. K. ZWORYKIN, *Electron Optics and the Electron Microscope*, John Wiley, New York 1948, S. 414 ff.

⁴ W. GLASER, *Grundlagen der Elektronenoptik*, Springer-Verlag, Wien 1952, S. 167 ff.

⁵ D. R. CRUISE, J. Appl. Phys. **34**, 3477 [1963].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht:
Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland
Lizenz

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

kleineren eindimensionalen Arrays gespeichert zu werden brauchen. Ein weiterer Vorteil bei der Bahnberechnung ist, daß sich die Feldstärkekomponenten als stetige und stetig differenzierbare Funktionen des Ortes ergeben, während man in Verbindung mit der Liebmannschen Maschenmethode Interpolationsformeln zur Feldberechnung benötigt, deren Koeffizienten und damit die Feldstärkekomponenten beim Übergang von einer Masche zur anderen sprunghafte Veränderungen erleiden können.

Als Anwendung des neuen Verfahrens wird zunächst das Potentialfeld des eingangs beschriebenen Strahlerzeugers berechnet. Die Ermittlung von Elektronenbahnen geschieht in der hier zulässigen nicht-relativistischen Näherung und ohne Berücksichtigung der Raumladung. Daß letztere Vereinfachung gerechtfertigt ist, sieht man ein, wenn man bedenkt, daß der Betrag der Feldstärke unmittelbar an der Kathodenspitze sehr hoch ist und deshalb der gesamte dort emittierte Elektronenstrom abgesaugt wird. Mit anderen Worten: Die Spitzenkathode wird nicht unter Raumladungs-, sondern unter Sättigungsbedingungen betrieben, und Raumladungseffekte können vernachlässigt werden.

Nach verschiedenen Bemühungen, Kenntnis über den Verlauf von Elektronenbahnen in einem Strahlerzeuger mit gekrümmter Kathodenoberfläche zu gewinnen, die sich z. B. auf ein theoretisches Feldmodell^{5a} oder auf experimentelle Forschungen^{5b} stützen, dürften in der vorliegenden Arbeit die Elektronenbahnen im Bereich zwischen Kathode und Anode eines solchen praktisch verwendeten Strahlerzeugers in der bisher besten Annäherung an die Wirklichkeit quantitativ bestimmt sein. Untersuchungen von WIESNER^{5c}, denen ein analytischer Lösungsansatz für die Potentialverteilung in der Umgebung von Spitzenkathoden zugrunde liegt, sind mir erst nach Abschluß dieser Arbeit bekannt geworden.

2. Entwicklung des Näherungsverfahrens

Gegeben ist eine rotationssymmetrische Anordnung leitender Elektroden im Vakuum. Zu berech-

nen ist das elektrostatische Feld für definierte zeitlich konstante Potentiale dieser Elektroden.

Beschreibt man die Verteilung der Oberflächenladungen auf den Elektroden durch die stetige Dichtefunktion $\sigma(\mathbf{r})$, dann gilt für das Potential Φ in jedem Raumpunkt \mathbf{r}_0 die Gleichung⁶:

$$\Phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{f}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (2.1)$$

wobei in kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist. Das Integral in Gl. (2.1) erstreckt sich über die Oberflächen sämtlicher Elektroden. Es impliziert die Normierung, daß das Potential im Unendlichen verschwindet. Für die Feldstärke \mathbf{E} erhält man durch Differentiation:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\mathcal{F}} \frac{\sigma(\mathbf{r}) d\mathbf{f}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (2.2)$$

Gleichung (2.2) kann für Punkte \mathbf{r}_0 auf der Oberfläche \mathcal{F} wegen der Unstetigkeit der Normalkomponente der Feldstärke beim Durchgang durch \mathcal{F} nicht angewendet werden. Dort gilt:

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)| = \frac{1}{\epsilon_0} |\sigma(\mathbf{r}_0)|,$$

wobei \mathbf{E} auf \mathcal{F} senkrecht steht und ins Vakuum weist, wenn $\sigma > 0$ ist.

Zur Spezialisierung für rotationssymmetrische Felder werden für \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 Zylinderkoordinaten r, φ, z bzw. r_0, φ_0, z_0 eingeführt, wobei wegen der Rotationssymmetrie φ_0 als Konstante betrachtet werden kann. Dann ergibt sich zunächst:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2. \quad (2.3)$$

Werden die Koordinaten r und z als stückweise stetige Funktionen

$$r = r(s), \quad z = z(s) \quad (2.4)$$

des Bogenlängenparameters s dargestellt, wobei $ds^2 = dr^2 + dz^2$ gilt, dann ergibt sich für das Flächenelement:

$$d\mathbf{f} = r(s) ds d\varphi. \quad (2.5)$$

Damit erhält Gl. (2.1) die Gestalt:

$$\Phi(r_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \int_{s_A}^{s_F} \sigma(s) r(s) \{r^2(s) + r_0^2 - 2r(s)r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z(s) - z_0)^2\}^{-\frac{1}{2}} ds d\varphi. \quad (2.6)$$

^{5a} R. LAUER, Z. Naturforsch. **23a**, 100 [1968].

^{5b} K. J. HANSZEN u. R. LAUER, Z. Naturforsch. **24a**, 214 [1969].

^{5c} J. C. WIESNER, Point Cathode Electron Sources III, Electronics Research Laboratory, Berkeley 1970.

⁶ R. BECKER u. F. SAUTER, Theorie der Elektrizität I, Teubner-Verlag, Stuttgart 1962, S. 50–61. — A. KNESCHKE, Differentialgleichungen und Randwertprobleme II, Teubner-Verlag, Leipzig 1961, S. 149–157.

Darin bedeuten s_A und s_E Anfangs- und Endpunkt des Parameterintervalls des Integrationsweges. Praktisch ist dieser meist nichtzusammenhängende Weg durch einen Meridionalschnitt der Elektrodenanordnung mit $r \geq 0$ definiert. Die Substitution

$$\alpha = \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0 - \pi) \quad (2.7)$$

führt (2.6) in

$$\Phi(r_0, z_0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{s_A}^{s_E} \sigma(s) r(s) \{ (r(s) + r_0)^2 - 4r(s)r_0 \sin^2 \alpha + (z(s) - z_0)^2 \}^{-\frac{1}{2}} ds d\alpha \quad (2.8)$$

über. Wegen der Symmetrie des Integranden in Gl. (2.8) kann die Integration über α mit Hilfe des vollständigen elliptischen Normalintegrals erster Gattung

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (2.9)$$

durchgeführt werden. Man erhält:

$$\Phi(r_0, z_0) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_{s_A}^{s_E} \frac{\sigma(s) r(s) K(k) ds}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}}. \quad (2.10)$$

Dabei ist

$$k^2 = k^2(s; r_0, z_0) = \frac{4r(s)r_0}{(r(s) + r_0)^2 + (z(s) - z_0)^2} \quad (2.11)$$

der Modul des elliptischen Normalintegrals. Ferner ist zur Abkürzung

$$H(s; r_0, z_0) := (r(s) + r_0)^2 + (z(s) - z_0)^2 \quad (2.12)$$

gesetzt.

Zur Berechnung der Feldstärkekomponenten nach Gl. (2.2) werden wegen

$$\nabla_{r_0} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial r_0}, \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0}, \frac{\partial}{\partial z_0} \right)$$

und der Rotationssymmetrie des Potentialfeldes die partiellen Ableitungen von Φ nach r_0 und z_0 benötigt. Durch Differentiation folgt aus (2.10) unter Berücksichtigung von (2.12):

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial r_0} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_{s_A}^{s_E} \frac{\sigma(s) r(s)}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{\partial K(k)}{\partial r_0} - \frac{K(k) (r(s) + r_0)}{H(s; r_0, z_0)} \right\} ds \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial z_0} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_{s_A}^{s_E} \frac{\sigma(s) r(s)}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{\partial K(k)}{\partial z_0} + \frac{K(k) (z(s) - z_0)}{H(s; r_0, z_0)} \right\} ds. \quad (2.14)$$

Für die Ableitung von $K(k)$ nach dem Modul k^2 gilt⁷:

$$\frac{dK(k)}{dk^2} = \frac{1}{2k^2} \left\{ \frac{E(k)}{k^2} - K(k) \right\}. \quad (2.15)$$

Hier bedeuten

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (2.16)$$

das vollständige elliptische Normalintegral zweiter Gattung und

$$k'^2 := 1 - k^2. \quad (2.17)$$

Unter Benutzung von (2.11) können also auch die partiellen Ableitungen von K nach r_0 und z_0 durch s , r_0 und z_0 ausgedrückt werden. Man erhält:

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial r_0} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_{s_A}^{s_E} \frac{\sigma(s) r(s)}{2r_0 \sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{E(k)}{k^2} \left[\frac{r^2(s) - r_0^2}{H(s; r_0, z_0)} + \frac{(z(s) - z_0)^2}{H(s; r_0, z_0)} \right] - K(k) \right\} ds; \quad r_0 > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial r_0} = 0; \quad r_0 = 0 \quad (2.18)$$

und

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial z_0} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_{s_A}^{s_E} \frac{\sigma(s) r(s)}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{E(k)}{k^2} \frac{z(s) - z_0}{H(s; r_0, z_0)} \right\} ds. \quad (2.19)$$

⁷ E. JAHNKE, F. EMDE u. F. LÖSCH, Tafeln höherer Funktionen, Teubner-Verlag, Stuttgart 1960, S. 64.

Die Formeln (2.10), (2.18) und (2.19) gestatten, die Potential- und Feldstärkeverteilung aus der Dichtefunktion $\sigma(s)$ zu berechnen. Leider kann man diese Funktion selten exakt ermitteln. Eine Näherung erhält man auf folgende Weise:

Man zerlegt das Integrationsintervall $[s_A, s_E]$ durch $n+1$ Teilpunkte $s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}$ mit $s_A = s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} = s_E$ in Teilintervalle $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$. Dann geht Gl. (2.10) über in

$$\Phi(r_0, z_0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi \varepsilon_0} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{\sigma(s) r(s) K(k) ds}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}}. \quad (2.20)$$

Wählt man nun für alle k die Teilintervalle Δs_k hinreichend klein, so kann Gl. (2.20) genähert durch

$$\Phi(r_0, z_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\pi \varepsilon_0} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{r(s) K(k) ds}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \quad (2.21)$$

ersetzt werden, oder wenn zur Abkürzung $\sigma_k^* := \sigma_k / \pi \varepsilon_0$ geschrieben wird:

$$\Phi(r_0, z_0) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^* \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{r(s) K(k) ds}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}}. \quad (2.22)$$

Aus den Gln. (2.18) und (2.19) ergibt sich auf ähnliche Weise:

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial r_0} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^* \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{r(s)}{2 r_0 \sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{E(k)}{k'^2} \left[\frac{r^2(s) - r_0^2}{H(s; r_0, z_0)} + \frac{(z(s) - z_0)^2}{H(s; r_0, z_0)} \right] - K(k) \right\} ds; \quad r_0 > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial r_0} = 0; \quad r_0 = 0 \quad (2.23)$$

und

$$\frac{\partial \Phi(r_0, z_0)}{\partial z_0} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^* \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{r(s)}{\sqrt{H(s; r_0, z_0)}} \left\{ \frac{E(k)}{k'^2} \frac{z(s) - z_0}{H(s; r_0, z_0)} \right\} ds. \quad (2.24)$$

Man definiert nun für $i = 1, 2, \dots, n$ die Werte der Funktionen $r(s)$ und $z(s)$ in den Mittelpunkten $s^{(i)} = (s_{i+1} + s_i)/2$ der Teilintervalle Δs_i durch

$$r_i := r(s^{(i)}), \quad z_i := z(s^{(i)}). \quad (2.25)$$

In diesen Punkten ist das Potential $\Phi_i := \Phi(r_i, z_i)$ vorgegeben. Wenn man also speziell $r_0 = r_i, z_0 = z_i$ wählt, folgt aus (2.22):

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n \sigma_k^* F_{ik}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

Hier bedeutet

$$F_{ik} := \int_{s_k}^{s_{k+1}} (r(s) K(k_i) / \sqrt{H(s; r_i, z_i)}) \quad (2.27)$$

$$\text{mit} \quad k_i^2 := k^2(s; r_i, z_i). \quad (2.28)$$

(2.26) ist ein lineares Gleichungssystem, das die σ_k^* aus den Φ_i zu berechnen gestattet. Setzt man σ_k^* in (2.22) – (2.24) ein, so erhält man damit die gesuchten Näherungen für die Potential- und Feldstärkeverteilung. Im Grenzfall $\Delta s_k \rightarrow 0$ für alle k , d. h. für $n \rightarrow \infty$, gehen diese Näherungen in die exakten Lösungen über. Voraussetzung für die Anwendung dieses Näherungsverfahrens ist wie schon erwähnt, daß der Integrationsweg stückweise in der Form (2.4) dargestellt werden kann. Dies ist jedoch für alle vorkommenden Elektrodenanordnungen der Fall. Somit ist dieses Verfahren allgemein anwendbar.

3. Numerische Durchführung der Feld- und Bahnberechnung

Zur numerischen Berechnung der Koeffizienten (2.27) und zur Auswertung der Gln. (2.22) bis (2.24) für die Potential- bzw. Feldstärkeverteilung werden zunächst die dort auftretenden elliptischen Normalintegrale durch die TSCHEBYSCHEFF-Approximationsformeln⁸

$$K(k) = (a_0 + a_1 k'^2 + a_2 k'^4 + a_3 k'^6) - (b_0 + b_1 k'^2 + b_2 k'^4 + b_3 k'^6) \ln k'^2 \quad (3.1)$$

$$\text{und} \quad E(k) = (c_0 + c_1 k'^2 + c_2 k'^4 + c_3 k'^6) - (d_0 + d_1 k'^2 + d_2 k'^4 + d_3 k'^6) \ln k'^2 \quad (3.2)$$

dargestellt; dabei ist k'^2 durch Gl. (2.17) definiert. Die Zahlenwerte der Konstanten sind:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1,3862 \, 9436, & b_0 &= 0,5, \\ a_1 &= 0,0979 \, 3289, & b_1 &= 0,1247 \, 5074, \\ a_2 &= 0,0545 \, 4441, & b_2 &= 0,0601 \, 1852, \\ a_3 &= 0,0320 \, 2467, & b_3 &= 0,0109 \, 4491 \end{aligned} \quad (3.3)$$

⁸ C. HASTINGS, Approximations for Digital Computers, Princeton University Press, Princeton 1955, S. 171, 174.

und

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, & d_0 &= 0, \\ c_1 &= 0,4447\,9204, & d_1 &= 0,2496\,9795, \\ c_2 &= 0,0850\,9919, & d_2 &= 0,0815\,0224, \\ c_3 &= 0,0409\,0509, & d_3 &= 0,0138\,2999. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Diese Approximationen weisen eine gleichmäßige Fehlerschwankung vom Betrag $6 \cdot 10^{-7}$ bzw. $7 \cdot 10^{-7}$ im ganzen Integrationsintervall der elliptischen Normalintegrale auf. Die Berechnung der in (2.27) definierten Koeffizienten F_{ik} erfolgt unter Verwendung von (3.1) und (3.3) durch numerische Auswertung der Integrale mit Hilfe Gausscher Quadraturformeln. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $i \neq k$: Der Integrand in (2.27) ist im ganzen Intervall Δs_k stetig. Zur Abkürzung setzt man

$$G(s; r_i, z_i) := \frac{r(s) K(k_i)}{\sqrt{H(s; r_i, z_i)}}. \quad (3.5)$$

Führt man in (3.5) die Substitution

$$t = \frac{2s - s_k - s_{k+1}}{\Delta s_k} \quad (3.6)$$

aus, so wird dadurch das s -Intervall $[s_k, s_{k+1}]$ in das t -Intervall $[-1, +1]$ überführt. Aus (2.27) ergibt sich mit (3.5) und (3.6):

$$F_{ik} = \int_{s_k}^{s_{k+1}} G(s; r_i, z_i) ds = \frac{\Delta s_k}{2} \int_{-1}^{+1} \bar{G}(t; r_i, z_i) dt. \quad (3.7)$$

Wenn man auf das zweite Integral die Gaussche Quadraturformel vierter Ordnung anwendet, so erhält man genähert:

$$F_{ik} = \frac{\Delta s_k}{2} \sum_{l=1}^2 A_l \{ \bar{G}(+t_l; r_i, z_i) + \bar{G}(-t_l; r_i, z_i) \} \quad (3.8)$$

mit den Stützstellen⁹

$$t_1 = 0,3399\,8104, \quad t_2 = 0,8611\,3631 \quad (3.9)$$

und den Gewichten

$$A_1 = 0,6521\,4515, \quad A_2 = 0,3478\,5485. \quad (3.10)$$

2. $i = k$: Der Integrand in (2.27) ist im Intervall Δs_i bei $s = s^{(i)}$ singulär. Dort wird nämlich

$k^2 = 1$ und damit $K(k) = \infty$. Nach (2.12) wird dort $H = 4r_i^2$, so daß der Integrand in (2.28) nur wie $\frac{1}{2} K(k) \approx -b_0 \ln k'$ unendlich wird. Das Integral hat daher einen endlichen Wert. Man kann deshalb zur Berechnung der F_{ii} eine Quadraturformel vom selben Typ wie (3.8) verwenden. Um trotz der logarithmischen Singularität ausreichende Genauigkeit zu erzielen, wird an Stelle der Gausschen Quadraturformel vierter die von sechster Ordnung verwendet. Man erhält direkt nach Ausführung der (3.6) entsprechenden Substitution

$$t = (2s - s_i - s_{i+1})/\Delta s_i \quad (3.11)$$

ähnlich wie in (3.8) genähert:

$$F_{ii} = \frac{\Delta s_i}{2} \sum_{l=1}^3 A_l \{ \bar{G}(+t_l; r_i, z_i) + \bar{G}(-t_l; r_i, z_i) \} \quad (3.12)$$

mit den Stützstellen¹⁰

$$\begin{aligned} t_1 &= 0,2386\,1919, & t_2 &= 0,6612\,0939, \\ t_3 &= 0,9324\,6951 \end{aligned} \quad (3.13)$$

und den Gewichten

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,4679\,1393, & A_2 &= 0,3607\,6157, \\ A_3 &= 0,1713\,2449. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Das lauter positive Koeffizienten enthaltende lineare Gleichungssystem (2.26) wird nach dem von STETTER¹¹ programmierten Iterationsverfahren, das auch bei großen n anwendbar ist, aufgelöst. Gilt für die ν -te Iteration

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k^{(\nu)} F_{ik} = \Phi_i^{(\nu)}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

so wird die Rechnung abgebrochen, falls

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Phi_i - \Phi_i^{(\nu)}}{\Phi_i} \right| &\leq \varepsilon; & \Phi_i &\neq 0 \\ |\Phi_i^{(\nu)}| &\leq \varepsilon; & \Phi_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

für $i = 1, 2, \dots, n$ mit der vorgegebenen Genauigkeitsschranke ε ist. Damit sind die σ_k^* bekannt.

Die Auswertung der in den Gln. (2.22) – (2.24) auftretenden Integrale erfolgt für Punkte, die nicht der Elektrodenoberfläche \mathcal{F} angehören, in analoger Weise wie bei der Auswertung der F_{ik} für $i \neq k$ mittels der Gausschen Quadraturformel vierter Ordnung, da die Integranden überall stetig sind.

⁹ A. RALSTON, A first Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York 1965, S. 89.

¹⁰ V. I. KRYLOV, Approximate Calculation of Integrals, The Macmillan Company, New York 1962, S. 338.

¹¹ F. STETTER, Fortran-Programm GLE 4, DRZ Darmstadt 1968.

Zur numerischen Berechnung der Elektronenbahnen kann man von den Gleichungen für die Bewegung eines Elektrons der Ruhmasse m_0 und der Ladung $-e$ im rotationssymmetrischen elektrostatischen Feld

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = r_0 \left(\frac{d\varphi_0}{d\tau} \right)^2 + \frac{\partial \Phi^*(r_0, z_0)}{\partial r_0},$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r_0^2 \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right) = 0, \quad \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} = \frac{\partial \Phi^*(r_0, z_0)}{\partial z_0}. \quad (3.17)$$

ausgehen. Die unabhängige Variable τ ist mit der Zeit t' durch

$$d\tau = \sqrt{\frac{e}{m_0}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' = \frac{\sqrt{e/m_0}}{1 + e \Phi / m_0 c^2} dt' \quad (3.18)$$

verknüpft. Ferner ist

$$\Phi^* := \Phi (1 + e \Phi / 2 m_0 c^2) \quad (3.19)$$

das „relativistisch korrigierte Potential“ *. Sind die Anfangswerte $r_0(0)$, $\varphi_0(0)$, $z_0(0)$, $\frac{dr_0}{d\tau}(0)$, $\frac{d\varphi_0}{d\tau}(0)$ und $\frac{dz_0}{d\tau}(0)$ gegeben, so löst man das Differentialgleichungssystem (3.17) unter Verwendung von (3.19) und (2.22) – (2.24) schrittweise nach der Methode von RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM¹². Um vom Ausgangspunkt zum ersten Integrationspunkt zu gelangen, wird die Rechnung zunächst mit der einfachen Schrittweite $\Delta\tau$ durchgeführt; die Koordinaten des erreichten Punktes seien $r_{\Delta\tau}$, $\varphi_{\Delta\tau}$, $z_{\Delta\tau}$. Anschließend wird die Rechnung mit der doppelten Schrittweite wiederholt; die Koordinaten des nun erreichten Punktes seien $r_{2\Delta\tau}$, $\varphi_{2\Delta\tau}$, $z_{2\Delta\tau}$. Wird $\Delta\tau$ so klein gewählt, daß im Ausdruck für den Fehler die Glieder höherer als fünfter Ordnung in $\Delta\tau$ gegenüber dem ersten nichtverschwindenden Glied in $(\Delta\tau)^5$ vernachlässigt werden können, so gelten die Korrekturformeln:

$$\begin{aligned} \delta r &= (r_{\Delta\tau} - r_{2\Delta\tau})/15, \\ \delta \varphi &= (\varphi_{\Delta\tau} - \varphi_{2\Delta\tau})/15, \\ \delta z &= (z_{\Delta\tau} - z_{2\Delta\tau})/15. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die vorläufige Lösung ist dann durch

$$r_0 = r_{\Delta\tau} + \delta r, \quad \varphi_0 = \varphi_{\Delta\tau} + \delta \varphi, \quad z_0 = z_{\Delta\tau} + \delta z \quad (3.21)$$

gegeben. Mit

$$\delta' := \max(|\delta r|, |\delta \varphi|, |\delta z|) \quad (3.22)$$

erfolgt eine Steuerung der Schrittweite nach der Festsetzung:

Für $0,15 \varepsilon' < \delta' < 10 \varepsilon'$: Beibehalten von $\Delta\tau$.

Für $10 \varepsilon' \leq \delta'$: Halbieren von $\Delta\tau$.

Für $\delta' \leq 0,15 \varepsilon'$: Verdoppeln von $\Delta\tau$.

Die Fehlertoleranz ε' ist dabei fest vorgegeben.

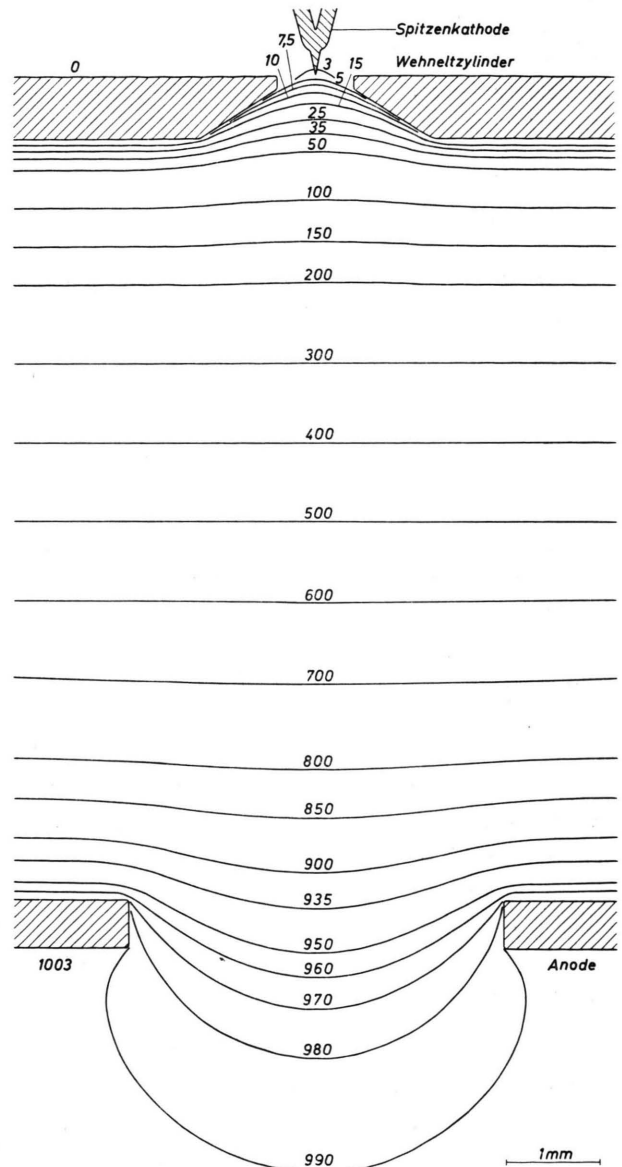


Abb. 4.1. Potentialfeld des Strahlerzeugers.

* Die Gln. (3.17) – (3.19) gelten für Elektronen ohne Anfangsenergie, d. h. $v=0$ bei $\Phi=0$, wie aus (3.18) folgt. Eine endliche Anfangsenergie kann berücksichtigt werden, indem man überall Φ durch $(\Phi + \Phi_0)$ mit entsprechendem Zusatzpotential Φ_0 ersetzt.

¹² R. ZURMÜHL, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Springer-Verlag, Berlin 1965, S. 417–435.

Für Meridionalbahnen kleiner Elektronenenergien (d.h. für Bahnen mit $d\varphi_0/d\tau \equiv 0$ und $|e\Phi|, |e\Phi_0| \ll m_0 c^2$) verringert sich die Rechenarbeit beträchtlich, da sich in diesem Fall das System (3.17) auf die erste und dritte Gleichung reduziert und das nicht relativistisch korrigierte Potential Φ verwendet werden kann.

4. Berechnung von Elektronenbahnen im Strahlerzeuger

Abbildung 4.1 zeigt das Potentialfeld des in Abb. 1.1 dargestellten Strahlerzeugers. Statt der tatsächlichen Potentialverteilung Φ ist die linear abhängige normierte Verteilung $\psi := \frac{1}{40} \Phi + 3$ V eingetragen. Für die numerische Berechnung des Potentialfeldes nach (2.22) wurde eine Näherung mit $n=98$ verwendet, die bei erträglichem Rechenaufwand gute Ergebnisse liefert. Dabei entfielen 48 Teilintervalle Δs_k auf die als Rotationskörper behandelte Spitzenkathode, 40 auf den Wehnelt-Zylinder und 10 auf die Anode. Bei der Bemessung der Größe und damit der Anzahl dieser Intervalle wurde beachtet, daß der Übergang von der exakten Gl. (2.20) zur Näherungsgleichung (2.21) — fehlerlose numerische Auswertung der Integrale vorausgesetzt — mit um so größerer Genauigkeit voll-

zogen werden kann, je weniger sich die Dichtefunktion $\sigma(s)$ längs des Integrationsweges ändert. Dem entsprechend wurden die Δs_k an der Kathodenspitze und an den Kanten von Wehnelt-Zylinder und Anode wesentlich kleiner gewählt als bei den übrigen Teilen der Anordnung. Als Genauigkeits-schranke für die Auflösung des Gleichungssystems (2.26) wurde $\varepsilon = 10^{-7}$ vorgegeben.

In Abb. 4.2 ist die Potentialverteilung ψ im vorderen Bereich der Kathodenspitze dargestellt. Man sieht, daß trotz der Approximation der Ladungsdichtefunktion $\sigma(s)$ durch die diskrete Folge der σ_k die Potentiallinien glatte Kurven sind. „Sprünge“ im Potentialverlauf machten sich erst bei Linien im Intervall $3,000 \text{ V} \leq \psi \leq 3,005 \text{ V}$ direkt vor der Spitze bemerkbar.

Durch eine Rechnung höherer Näherung ($n=140$) wurde die Genauigkeit der Rechnung mit $n=98$ nicht mehr wesentlich verbessert. Auf Grund der vorher mit $n=67$ und $n=110$ durchgeführten Tests des Verfahrens an Feldern mit bekannter analytischer Lösung (z.B. elektrostatisches Feld einer Lochblende zwischen homogenen Bereichen) wird angenommen, daß in dem für die Bahnberechnung in Frage kommenden Bereich die Potential- und Feldstärkeverteilung mit einem Fehler von weniger als 1% behaftet sind.

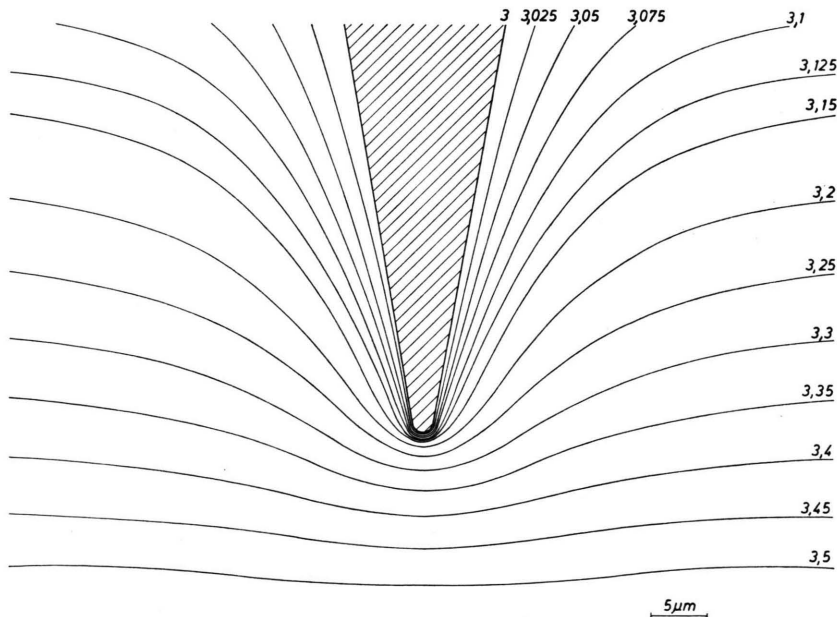


Abb. 4.2. Potentialfeld in der Umgebung der Spitze.

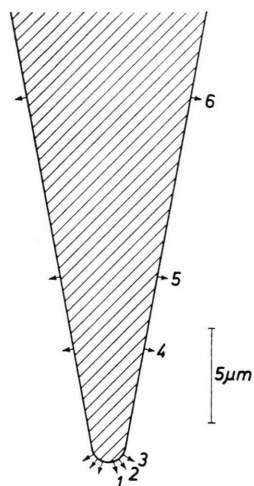


Abb. 4.3. Anfangspunkte und -richtungen der Bahnen von Elektronen ohne kinetische Anfangsenergie.

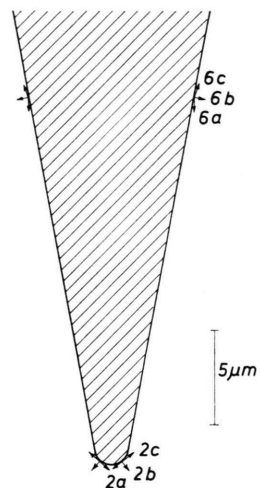


Abb. 4.4. Anfangspunkte und -richtungen der Bahnen von Elektronen mit kinetischer Anfangsenergie.

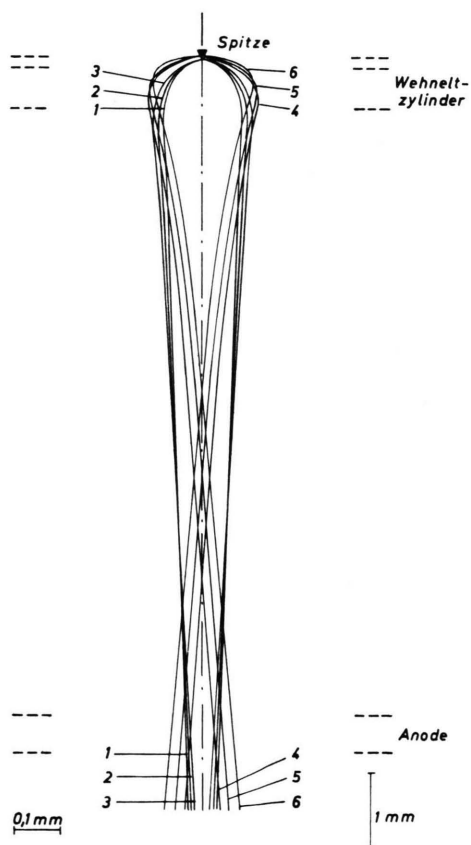


Abb. 4.5. Bahnen der Elektronen ohne kinetische Anfangsenergie.

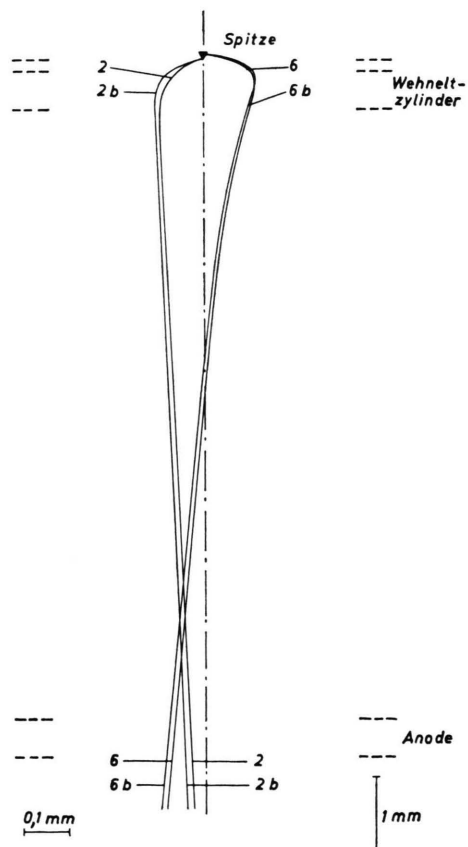


Abb. 4.6. Bahnen von Elektronen mit verschiedenen kinetischen Anfangsenergien.

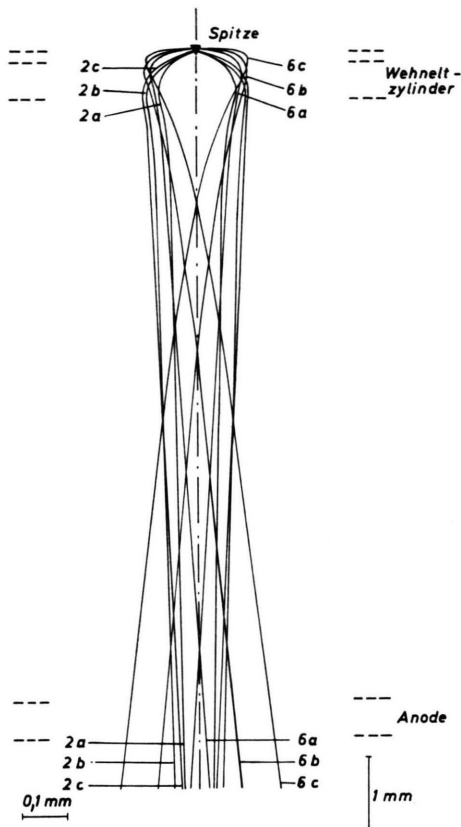


Abb. 4.7. Bahnen der Elektronen mit kinetischer Anfangsenergie.

Um eine gewisse Vorstellung von der Gestalt des Elektronenstrahlbündels zu bekommen, wurden in nichtrelativistischer Näherung meridionale Elektronenbahnen berechnet, deren Ausgangspunkte sämtlich auf dem für die Elektronenemission verantwortlichen vorderen Teil der Kathodenspitze liegen (tatsächlich wurden sehr dicht vor der Kathodenoberfläche gelegene Ausgangspunkte unter Berücksichtigung ihrer Potentiale gewählt, da die Ausdrücke (2.23) und (2.24) auf der Oberfläche selbst nicht verwendbar sind). Die Rechnung wurde für Elektronen durchgeführt, welche die Kathode ohne kinetische Energie (senkrecht zur Oberfläche, Abb. 4.3) und mit 1 eV kinetischer Energie (senkrecht und parallel zur Oberfläche, Abb. 4.4) verlassen.

Den vollständigen Verlauf der Bahnen zeigen die Abb. 4.5 und 4.7, dabei entsprechen die Bezeichnungen denen der Abb. 4.3 und 4.4. Der Maßstab ist in radialer Richtung 6-fach überhöht. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die axiale Lage von Wehnelt-Zylinder und Anode.

Für die Berechnung der Bahnen zwischen Kathodenspitze und hinterer Kante des Wehnelt-Zylinders (etwa bis zur Potentiallinie $\psi = 50$ V in Abb. 4.1) wurde als Anfangsschrittweite $\Delta\tau = 0,05$ und als Fehlertoleranz $\epsilon' = 0,005$ verwendet. Hierzu waren 110–125 Integrationsschritte notwendig. Für den übrigen im nahezu homogenen Feld verlaufenden Teil der Bahnen erwies sich $\Delta\tau = 0,05$ und $\epsilon' = 0,08$ als ausreichend. Dabei reduzierte sich die Schrittzahl auf 60.

Aus Abb. 4.5 erkennt man, daß sich mit zunehmendem Achsenabstand des Anfangspunktes der Bahnen die Lage des Achsenschnittpunktes monoton der Kathode nähert: Der Schnittpunkt der Bahn 1 liegt vor der Anode, während Bahn 6 die Achse im Raum zwischen Anode und Wehnelt-Zylinderschneidet.

Um den Einfluß der thermischen Geschwindigkeitsverteilung zu untersuchen, wurden zusätzlich zu den Bahnen mit verschwindender kinetischer Anfangsenergie auch einige mit 1 eV Anfangsenergie berechnet. Abbildung 4.6 zeigt, daß sich diejenigen Bahnen, die von denselben Anfangspunkten senkrecht zur Kathodenoberfläche einmal ohne und einmal mit kinetischer Anfangsenergie ausgehen, kaum voneinander unterscheiden. Parallel zur Oberfläche austretende Elektronen bewirken dagegen eine starke Verbreiterung des Strahlbündels (Abb. 4.7) und zeigen hierdurch deutlich den Einfluß der Richtungsverteilung bei der Emission an.

Berechnungen der Stromdichte- und Energieverteilung in den Strahlquerschnitten sind im Gange. Über ihre Ergebnisse wird später berichtet.

Herrn Prof. Dr. G. MÖLLENSTEDT danke ich für die förderliche Unterstützung dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. F. LENZ und Herrn Dr. K. H. GAUKLER für wertvolle Diskussionen. Dem Regionalen Rechenzentrum Stuttgart und dem Zentrum für Datenverarbeitung der Universität Tübingen bin ich für die Überlassung von Rechenzeit zu Dank verpflichtet.